

**1**

(60 点)

実数

$$\int_0^{2023} \frac{2}{x + e^x} dx$$

の整数部分を求めよ。

**2**

(60 点)

方程式

$$(x^3 - x)^2(y^3 - y) = 86400$$

を満たす整数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

**3**

(60 点)

実数が書かれた 3 枚のカード  $\boxed{0}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{\sqrt{3}}$  から、無作為に 2 枚のカードを順に選び、出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える。正の整数  $n$  に対して、この操作を  $n$  回繰り返して得られる  $n$  個の複素数の積を  $z_n$  で表す。

- (1)  $|z_n| < 5$  となる確率  $P_n$  を求めよ。
- (2)  $z_n^2$  が実数となる確率  $Q_n$  を求めよ。

4

(60 点)

$xyz$  空間において、 $x$  軸を軸とする半径 2 の円柱から、 $|y| < 1$  かつ  $|z| < 1$  で表される角柱の内部を取り除いたものを  $A$  とする。また、 $A$  を  $x$  軸のまわりに  $45^\circ$  回転してから  $z$  軸のまわりに  $90^\circ$  回転したものを  $B$  とする。 $A$  と  $B$  の共通部分の体積を求めよ。

5

(60 点)

$xyz$  空間の 4 点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(-1, 1, -1)$ ,  $D(-1, 0, 0)$  を考える。

- (1) 2 直線  $AB$ ,  $BC$  から等距離にある点全体のなす図形を求めよ。
- (2) 4 直線  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ。