

1

(60 点)

xy 平面上の曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ に, 点 $(a, \frac{1}{2}a^2)$ ($a > 0$) で接する円のうち, y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく。 a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C , とくに S_1 の中心を P とする。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ。

2

(60 点)

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$ 、 $g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする。

$$f'(t) = -f(t)g(t), \quad g'(t) = \{f(t)\}^2,$$

$$f(t) > 0, \quad |g(t)| < 1, \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0.$$

このとき、

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく。

(1) $p'(t)$ を求めよ。

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ。

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ を求めよ。

(4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して、媒介変数表示された平面曲線

$$(x, y) = (f(t), g(t)) \quad (0 \leq t \leq T) \text{ の長さを求めよ。}$$

3

(60 点)

xy 平面上に, 点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$ (ただし $0 < a < b$) をとる。点 A , B を通る直線を ℓ とし, 点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする。さらに, 点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし, 点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする。以下, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1} , 点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする。

- (1) 点 A_n , C_n の座標を求めよ。
- (2) $\triangle CBA_n$ の面積 S_n を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BA_n}{BC}$ を求めよ。

4

(60 点)

n を正の整数とし, $C_1, \dots, C_n$ を n 枚の硬貨とする。各 $k = 1, \dots, n$ に対し, 硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k , 裏が出る確率を $1 - p_k$ とする。この n 枚の硬貨を同時に投げ, 表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功, というゲームを考える。

(1) $p_k = \frac{1}{3}$ ($k = 1, \dots, n$) のとき, このゲームで成功する確率 X_n を求めよ。

(2) $p_k = \frac{1}{2(k+1)}$ ($k = 1, \dots, n$) のとき, このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ。

(3) $n = 3m$ (m は正の整数) で, $k = 1, \dots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{3m} & (k = 1, \dots, m) \\ \frac{2}{3m} & (k = m+1, \dots, 2m) \\ \frac{1}{m} & (k = 2m+1, \dots, 3m) \end{cases}$$

とする。このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき, $\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{3m}$ を求めよ。

5

(60 点)

整数の組 (a, b) に対して 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える。方程式 $f(x) = 0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n = 1$ となる正の整数 n が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。