

1

a, b を正の数とする. 2つの曲線 $y = x^3 + bx^2$, $y = ax^2 + abx$ によって囲まれる2つの部分の面積の和を S とする.

(1) S を a と b で表せ.

(2) $a + b = 1$ のとき, S を最小にする a, b の値と, そのときの S の値を求めよ.

2

関数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ ($x \neq 0$) について, $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ とおく.

(1) a, b の値を求めよ.

(2) $-\frac{1}{2} \leq x$ の範囲で, 3つの関数 $\sqrt{1+2x}$, $1+ax$, $1+ax+bx^2$ の大小関係を調べ, これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け.

3

1 から 200 までの整数が 1 つずつ記入された 200 枚のカードの入った箱がある。この箱から 1 枚のカードを無作為に抜き出して、それに書かれた数が奇数であればその数を得点とし、偶数の場合は奇数になるまで 2 で割って得られる奇数を得点とする。例えば、抜き出したカードの数が 28 であれば、これを 2 で 2 回割って得られる 7 が得点となる。1 枚のカードを抜き出したときの得点の期待値を求めよ。

4

四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ、 L, M, N, P, Q, R とし、 $\vec{p} = \overrightarrow{LP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{MQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{NR}$ とおく。

- (1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。
- (2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ を用いて表せ。
- (3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。 X を $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{LP}$ となる空間の点とすると、四面体 $XABC$ の体積および四面体 $OABC$ の体積を $|\vec{p}|, |\vec{q}|, |\vec{r}|$ を用いて表せ。

5

複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ (ただし, x, y, u, v は実数) は $|z| = |w| = 1$ を満たし, $yv < 0$ とする。 $|1 + z + w| < 1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ。

6

(1) n を正の整数とする。 $t \geq 0$ のとき, 不等式 $e^t \geq \frac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

(2) 極限 $I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^m e^{-x} dx$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。