$\boxed{1}$ 定数 $a, b, c, p, q$ を整数とし，次の $x$ と $y$ の 3 つの多項式

$$P = (x+a)^2 - 9c^2(y+b)^2$$

$$Q = (x+11)^2 + 13(x+11)y + 36y^2$$

$$R = x^2 + (p+2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p-14q)y - 77$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 多項式 $P, Q, R$ を因数分解せよ．

(2) $P \cup Q, Q \subseteq R, R \cup P$ は，それぞれ $x, y$ の 1 次式を共通因数としてもっているものとする．このときの整数 $a, b, c, p, q$ を求めよ．

$\boxed{2}$ 袋の中に１から７までの番号が書かれた球が７個入っている．ここから同時に３個の球を取り出す．取り出された３個の球に書かれている数を大きいものから順にＸ，Ｙ，Ｚとする．Ｘ，Ｙ，Ｚそれぞれの期待値を求めよ．ただし，７個の球にはそれぞれ互いに異なる１個の番号が書かれていて，どの球も取り出される確率は皆等しいものとする．

$\boxed{3}$ 図－1のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 $ABCD$ を考える。この四角形 $ABCD$ を $AC$ で折り，図－2のように点 $B, C, D$ が平面 $P$ にのるように置く。図－2に現れる辺 $CB$ と辺 $CD$ とがなす角を $\alpha, \alpha = \angle BCD$，とし $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 図－2において，$A$ から平面 $P$ に下ろした垂線が $P$ と交わる点を $H$ とする。$AH$ を $CA, CB, CD$ と $\alpha$ で表せ.

(2) $AH$ の長さを $\alpha$ を用いて表せ.

(3) $H$ が図－2における $\triangle BCD$ の重心となるときの角度 $\alpha$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2$，$y \leqq 0$ が表す $xy$ 平面内の領域を $D$ とする．また，$a$ を定数とし，不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す $xy$ 平面内の領域を $E$ とする．以下の問に答えよ.

(1) $D$ と $E$ とが共通点をもつような実数 $a$ の範囲を求めよ.

(2) (1) の範囲の $a$ に対して，$D$ と $E$ との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ.