

1

多項式 $F(x)$ を零でない多項式 $G(x)$ で割った余りを $R(x)$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 方程式 $F(x) = 0$ と $G(x) = 0$ の共通解は方程式 $R(x) = 0$ の解であることを示せ.
- (2) a は実数の定数として

$$G(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + 2(a-2)x + 4a$$

$$R(x) = x^3 + x^2 - (a^2 + 3a + 6)x + 2a(a+3)$$

とする. $G(x)$ を $R(x)$ で割った余り $S(x)$ を求めよ. さらに, 方程式 $F(x) = 0$ と $G(x) = 0$ の共通の実数解を求めよ.

2

数列 $\{a_n\}$ に対して初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする. p は定数とし, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$S_n = \frac{n}{3}(2p + a_n)$$

が満たされているものとし, $b_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ とおく. $a_3 = q$ として以下の間に答えよ.

- (1) b_1, b_2, b_3 を p, q を用いて表せ.
- (2) 一般項 b_n を p, q, n を用いて表せ.
- (3) 一般項 a_n を p, q, n を用いて表せ.

3

1 個のサイコロを振り、出た目が 1 から 5 ならば出た目の数を総得点に加算し、出た目が 6 ならば総得点を 0 にするというゲームを考える。ゲーム開始時の総得点は 0 とする。たとえば、3 回サイコロを振ったときに出た目が順に 1, 2, 3 ならば総得点は 6, 出た目が順に 4, 6, 5 ならば総得点は 5 である。以下の間に答えよ。

- (1) ゲーム開始時サイコロを 2 回振った後の総得点の期待値を求めよ。
- (2) ゲームを開始してサイコロを 3 回振った後の総得点が 7 以上となる確率を求めよ。
- (3) 現在の総得点が S のとき、次に 1 回サイコロを振った後の総得点の期待値が S 以下となるための S についての条件を求めよ。

4

a は正の定数とし、 $-1 \leq x \leq 1$ において定義される関数

$$f(x) = ax - (1+x)\log(1+x) - (1-x)\log(1-x)$$

に関して以下の間に答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) $-1 < x < 1$ において第 2 次導関数 $f''(x)$ は $f''(0) < 0$ であることを示せ。
- (2) $-1 < x < 1$ において $f(x)$ の最大値を与える x の値 x_0 を a を用いて表せ。
- (3) $a = 1$ の場合、 $0 < x_1 < 1$ であって $f(x_1) = 0$ となる x_1 が存在することを示せ。

なお、必要ならば $\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$ は既知としてよい。

- (4) $a = 1$ の場合の、 $-1 \leq x \leq 1$ におけるグラフ $y = f(x)$ の概形をかけ。

5 xyz 空間において半径が 1 で x 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_1 と、半径が 1 で y 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_2 がある。 C_1 と C_2 の共通部分のうち $y \leq \frac{1}{2}$ である部分を K とおく。以下の間に答えよ。

- (1) u を $-1 \leq u \leq 1$ を満たす実数とするとき、平面 $z = u$ による K の切断面の面積を求めよ。
- (2) K の体積を求めよ。

6 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし、実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の間に答えよ。

- (1) $x = a + d$ として、 $A^2 = xA + yE$ を満たす実数 y を求めよ。
- (2) A が $A^3 = E$ かつ $A \neq E$ を満たすことは、 A が $A^2 + A + E = O$ を満たすことと同値であることを示せ。
- (3) $A^6 = E$ かつ $A^2 \neq E$ ならば、 $A^3 = E$ または $A^3 = -E$ がなりたつことを示せ。