

1

n を 2 以上の自然数とし、整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

- (1) a_2, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (3) 各 n に対して、 a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

2

$\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して、 $\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また、線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。 $\angle A = \theta$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\theta < \frac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし、 $\sqrt{2} = 1.414\dots, \sqrt{3} = 1.732\dots$ を用いてもよい。

3 自然数 n に対し, 方程式

$$\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$$

を考える。ただし, 対数は自然対数であり, e はその底とする。

(1) 上の方程式は $x \geq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ。

(2) (1) の解を x_n とする。このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

を示せ。

4 平面上に 4 点 $(0, 0), (4, 0), (4, 4), (0, 4)$ を頂点とする正方形 K を考える。点 $(1, 2)$ を通る各直線に対して, その K に含まれる部分を l とおく。

(1) l の長さの最大値と, それを与える直線の方程式を求めよ。

(2) l の長さの最小値を求めよ。

- 5 xyz 空間において、点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし、 l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする。 A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ。

- 6 $a > 0$ に対し $I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} dx$, $I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。

- (1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。
- (2) 漸化式 $I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a)$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。
- (3) 自然数 n に対して、 $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a)$ を求めよ。