

1

多項式 $f(x)$ について、次の条件 (i)、(ii)、(iii) を考える。

$$(i) x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

$$(ii) f(1-x) = f(x)$$

$$(iii) f(1) = 1$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 条件 (i) をみたす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件 (i)、(ii)、(iii) をすべてみたす多項式 $f(x)$ を求めよ。

2

n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$ 、 $OA_1 = 1$ 、 $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ をみたすとする。 A_2 から OA_1 へ垂線をおろし、交点を A_3 とする。 A_3 から OA_2 へ垂線をおろし、交点を A_4 とする。以下同様に、 $k = 4, 5, \dots$ について、 A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし、交点を A_{k+1} として、順番に $A_5, A_6, \dots$ を定める。 $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

(1) $k = 1, 2, \dots$ のとき、ベクトル $\vec{h}_k$ と $\vec{h}_{k+1}$ の内積 $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ を n と k で表せ。

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$$

とおくとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ここで、自然対数の底

e について、 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。

3 θ を $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし、空間の 4 点 O, A, B, C が、
 $OA = OB = OC = 1$ かつ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \theta$ をみたすとする。
 このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 AG と OG をそれぞれ θ で表せ。
- (2) θ を動かしたときの、 O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

4 点 P が次のルール (i)、(ii) に従って数直線上を移動するものとする。
 (i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り、出た目の数を k とする。
 P の座標 a について、 $a > 0$ ならば座標 $a - k$ の点へ移動し、 $a < 0$ ならば座標 $a + k$ の点へ移動する。
 (ii) 原点に移動したら終了し、そうでなければ (i) を繰り返す。
 このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) P の座標が 1, 2, $\dots$, 6 のいずれかであるとき、ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (2) P の座標が 1, 2, $\dots$, 6 のいずれかであるとき、ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (3) P の座標が 8 であるとき、ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

5

a を実数として、2 次の正方行列 A, B を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

このとき、 $((\cos t)A + (\sin t)B)^2 = 0$ をみたす実数 t が存在するような a の範囲を求めよ。ただし、 O は零行列とする。

6

$k > 1$ として、 $f(x) = x^2 + 2kx$ とおく。曲線 $y = f(x)$ と円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の2つの交点の中で、第1象限にあるものを P とし、第3象限にあるものを Q とする。点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ に対して、 $\alpha = \angle AOP$, $\beta = \angle BOQ$ とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1) k を α で表せ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と円 C で囲まれる2つの図形の中で、 $y = f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ。