

1

a, b, c を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a + b = c$ であるとき、 $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つことを示せ．

(2) $a + b \geq c$ であるとき、 $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つことを示せ．

2

L を 2 以上の自然数、 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする．縦 1cm、横 $(L + 1)$ cm の長方形の紙を用いて、次のように長方形 A、B を作る．

長方形 A の作り方． L 枚の紙を横に並べて、順に 1 辺 1cm の正方形をのりしろとして（隣り合う紙が横 1cm に重なるように）はり合わせ、縦 1cm の横長の長方形を作る．

長方形 B の作り方． L 枚の紙を縦に並べて、隣り合う紙が縦 a cm 重なるようにはり合わせて、横 $(L + 1)$ cm の長方形を作る．

長方形 A、B の面積をそれぞれ $S_1 \text{cm}^2$ および $S_2 \text{cm}^2$ とおくとき、以下の問いに答えよ．

(1) S_1 と S_2 を求めよ．

(2) $L = 2$ のとき、 $S_1 - 1 < S_2$ となる a の範囲を求めよ．

(3) $S_1 - 1 < S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ．

3

袋の中に青玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている．袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す．一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ．

- (1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ．
- (2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ．
- (3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ．
- (4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ．

4

a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 実数 θ に対して $\sin \theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく．すなわち，
 $\sin \theta \geq \sin(\theta - 2a)$ のとき $f(\theta) = \sin \theta$ ， $\sin \theta < \sin(\theta - 2a)$ のとき
 $f(\theta) = \sin(\theta - 2a)$
 となる関数 $f(\theta)$ を考える．このとき定積分 $I = \int_0^\pi f(\theta) d\theta$ を求めよ．
- (2) a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき，(1) の I の最大値を求めよ．

5 a, b, c, d, p, q は $ad - bc > 0, p > 0, q > 0$ を満たす実数とする。2つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \therefore P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

が $APA = P^2$ を満たすとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $P^3 A = AP^3$ が成り立つことを示せ。

(2) A を p と q で表せ。

6 実数 a に対して、 x の方程式 $|x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1 = 0$ が、相異なる4つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。