$\boxed{1}$ $f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。 $y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ a,b を正の実数とする．曲線 $C: y=x^3-a^2x+a^3$ と点 $P(b,0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 (a,b) の存在する領域を図示せよ．

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする．2 つの接点を A,B としたとき，$\angle APB$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ．

$\boxed{3}$ 1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる．まず 1 枚を取り出して現れた数字を 1 の位とする．取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を 10 の位とする．

このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる．得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ．

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ．

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ．

$\boxed{4}$ 四面体 $ABCD$ において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式 $[QA+QB]=[QC+QD]$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式 $[RA^2]+[RB^2]=[RC^2]+[RD^2]$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $[AB]=[CD]$ であることを示せ。

$\boxed{5}$ $0 < t < 3$ のとき，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq \sin x \\ 0 \leqq x \leqq t - y \end{cases}$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする．

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\pi}{4}$$

となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ．

$\boxed{6}$ xy 平面において，原点を中心とし $P(1,0)$ を頂点の 1 つとする正 6 角形を X とする。A を 2 次の正方行列とし，X の各頂点 (x, y) に対して，行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 (x', y') は X の辺上の点（頂点を含む）であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。

(2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。