

1

実数 a に対し, 不等式 $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。
- (2) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。

2

a を実数とする. 円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち, 点 $(0, 1)$ を通るものとする. C の中心を $P(X, Y)$ として, 以下の問いに答えよ.

- (1) X, Y を a を用いて表せ.
- (2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

3

先生と3人の生徒A, B, Cがおり、玉の入った箱がある。箱の中には最初、赤玉3個、白玉7個、全部で10個の玉が入っている。先生がサイコロをふって、1の目が出たらAが、2または3の目が出たらBが、その他の目が出たらCが箱の中から1つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず、取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。ただし、サイコロの1から6の目の出る確率は等しいものとし、また、箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) 2回目の操作が終わったとき、Aが2個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (2) 2回目の操作が終わったとき、Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (3) 3回目の操作で、Cが赤玉を取り出す確率を求めよ。

4

平面上に長さ3の線分OAを考え、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a}$ で表す。 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$ となるように点Pを定める。大きさ2のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ ($0 < \theta < \pi$)をなすようにとり、点Bを $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ で定める。線分OBの中点をQとし、線分AQと線分BPの交点をRとする。このとき、どのように θ をとっても $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。

5 a を実数, z を 0 でない複素数とする. z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す.

(1) 次を満たす z を求めよ.

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$$

6 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする. f による点 $P(1, 1)$ の像を P_1 とする. 正の整数 n に対し, P_n の f による像を P_{n+1} とする. P_n が点 $Q(10, 10)$ に最も近くなるときの n の値を求めよ.