

1

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
- (2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

2

m を実数とする。座標平面上で直線 $y = x$ に関する対称移動を表す 1 次変換を f とし、直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す 1 次変換を g とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 1 次変換 g を表す行列 A を求めよ。
- (2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列 B を求めよ。
- (3) $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ。

3

袋 A、袋 B のそれぞれに、1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

- (1) $N = 4$ とする。袋 A、B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し、数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし、取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後、数字が一致していた回数を X とする。 $X = 1$ 、 $X = 2$ 、 $X = 3$ 、 $X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また、 X の期待値を求めよ。
- (2) $N = 3$ とし、 n は自然数とする。袋 A、B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し、カードの数字が一致していたら、それらのカードを取り除き、一致していなかったら、元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし、 n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。 p_n と q_n を求めよ。

4

$0 \leq x \leq \pi$ に対して、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos |t - x|}{1 + \sin |t - x|} dt$$

と定める。 $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

5

長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし、点 P は点 A、B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle BPQ = \frac{\pi}{3}$ となるようにとり、線分 BP の長さを x とし、線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

- (1) y を x を用いて表せ。
- (2) 点 P が 2 点 A、B を除いた円周 C 上を動くとき、 y が最大となる x を求めよ。

6

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、 $a_n > 1$ となることを示せ。
- (2) $a^2 = \frac{3a + 4}{2a + 3}$ を満たす正の実数 a を求めよ。
- (3) すべての自然数 n に対して $a_n < a$ となることを示せ。
- (4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して、不等式

$$\frac{a - a_{n+1}}{a - a_n} \leq r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。さらに、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。