

1

k を実数とする。3 次式 $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$ に対し、方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とする。 $g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で、方程式 $g(x) = 0$ の 3 つの解が $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ であるものとする。

- (1) $g(x)$ を k を用いて表せ。
- (2) 2 つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

2

四面体 $OABC$ において、 $OA = OB = OC = 1$ とする。 $\angle AOB = 60^\circ$ 、 $\angle BOC = 45^\circ$ 、 $\angle COA = 45^\circ$ とし、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ 、 $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き、その交点を H とする。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を用いて表せ。
- (2) CH の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

3

A、B の 2 人が、サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし、その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし、以下の問いに答えよ。

- (1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。
- (2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。
- (3) B がちょうど 3 回投げて、その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

4

数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} d\theta, \quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} \cos \theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) 一般項 b_n を求めよ。
- (2) すべての n について、 $b_n \leq a_n \leq \frac{2}{\sqrt{3}} b_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(na_n)$ を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

5 2 次 の 正 方 行 列 A を $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で 定 め る。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に 対 し て、点 $P_n(x_n, y_n)$ を 関 係 式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で 定 め る。 た だ し、 $x_0 = 1$ 、 $y_0 = 0$ と す る。

- (1) A^4 を 求 め よ。
- (2) $n = 0, 1, 2, \dots$ に 対 し て、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が 成 り 立 つ こ と を 示 せ。 た だ し、 E は 2 次 の 単 位 行 列 と す る。

- (3) 原 点 O か ら P_n ま で の 距 離 OP_n が 最 大 と な る n を 求 め よ。

6 半 径 1 の 円 を 底 面 と す る 高 さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の 直 円 柱 が あ る。 底 面 の 円 の 中 心 を O と し、直 径 を 1 つ 取 り AB と お く。 AB を 含 み 底 面 と 45° の 角 度 を な す 平 面 で こ の 直 円 柱 を 2 つ の 部 分 に 分 け る と き、体 積 の 小 さ い 方 の 部 分 を V と す る。

- (1) 直 径 AB と 直 交 し、 O と の 距 離 が t ($0 \leq t \leq 1$) で あ る よ う な 平 面 で V を 切 っ た と き の 断 面 積 $S(t)$ を 求 め よ。
- (2) V の 体 積 を 求 め よ。