$\boxed{1}$ $x = t + \dfrac{1}{3t}$ $\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とする。

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ。

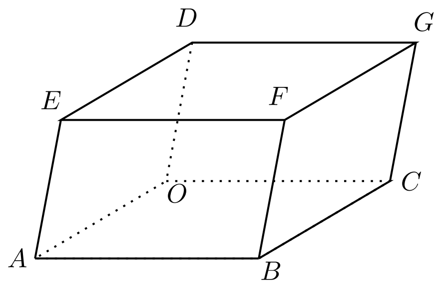
(2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{2}$ 下図のような平行六面体 OABC-DEFG が xyz 空間内にあり、$O(0,0,0)$、$A(2,0,0)$、$C(0,3,0)$、$D(-1,0,\sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし、辺 DG 上の点 N を MN = 4 かつ DN ¡ GN を満たすように定める。

(1) N の座標を求めよ。

(2) 3 点 E、M、N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3) 3 点 E、M、N を通る平面による平行六面体 OABC-DEFG の切り口の面積を求めよ。



$\boxed{3}$ 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ、合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と、4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 不等式 $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする。P を円 $x^2+y^2=1$ 上の点、Q と R を円 $x^2+y^2=4$ 上の異なる 2 点とし、三角形 PQR は領域 D に含まれているとする。a、b を実数とし、行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ により P は P'、Q は Q'、R は R' に移されるとする。このとき、三角形 $P'Q'R'$ が領域 D に含まれるための a、b の必要十分条件を求めよ。ただし、三角形は内部も含めて考えるものとする。

$\boxed{5}$ 整数 n に対して、

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}\, dx$$

とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) n を正の整数とするとき、$I_n - I_{n-1}$ を求めよ。

(3) I_5 を求めよ。

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数、a を正の定数として、

$$f(x) = (n+1)\left[\log(a+x) - \log(n+1)\right] - n\left[\log a - \log n\right] - \log x$$

とおく。$x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

(2) n が 2 以上の自然数のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$