$\boxed{1}$ xy 平面において、次の式が表す曲線を C とする。

$$x^2 + 4y^2 = 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

P を C 上の点とする。P で C に接する直線を l とし、P を通り l と垂直な直線を m として、x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。P が C 上の点全体を動くとき、S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$ xy 平面において、3 次関数 $y = x^3 - x$ のグラフを C とし、不等式

$$x^3 - x > y > -x$$

の表す領域を D とする。また、P を D の点とする。

(1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。

$\boxed{3}$ サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に $p_1,\ p_2,\ p_3$ とし、x の 2 次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \quad \cdots\cdots \ (*)$$

を考える。

(1) 方程式 (*) が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式 (*) が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha,\ \beta$ をもち、かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式 (*) が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha,\ \beta$ をもち、かつ $\alpha\beta < 1$ が成り立つ確率を求めよ。

$\boxed{4}$ $a > 0$ を実数とする。$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し、座標平面の 3 点

$$(2n\pi\ ,\ 0)\ , \quad \left((2n + \frac{1}{2})\pi\ ,\ \frac{1}{\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}^a}\right), \quad ((2n+1)\pi\ ,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし、

$$B_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a} dx, \quad C_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$$

とおく。

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{[(2n+1)\pi]^a} \leqq B_n \leqq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $t>0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $P(t,\sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が (1) で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$ $k \geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき、すなわち、

$$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき、n を k-連続和とよぶことにする。ただし、自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは、次の条件 (A)、(B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$は整数である。

(B) $2n > k^2$が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n = 2^f$ のとき、n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし、p を 2 でない素数とする。$n = p^f$ のとき、n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ。