$\boxed{1}$ 平面上で原点 O と 3 点 $A(3,1)$, $B(1,2)$, $C(-1,1)$ を考える。実数 s,t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) s,t が条件

$$-1 \leqq s \leqq 1, \quad -1 \leqq t \leqq 1, \quad -1 \leqq s+t \leqq 1$$

を満たすとき，点 $P(x,y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$ 放物線 $C : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。

(2) a,b を実数とする。関数 $y = -2|x-a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a,b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。

(3) (2) で求めた領域 D の面積を求めよ。

3 ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ, ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として, 可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ。

4 ABC において, 頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。

(2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。