

1

鋭角三角形 $\triangle ABC$ において、頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。

2

以下の問いに答えよ。

- (1) 6 以上の整数 n に対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

- (2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組 (p, q) をすべて求めよ。

3

サイコロを3回振って出た目の数をそれぞれ順に a, b, c とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c がある直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。
- (2) a, b, c がある鈍角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。

4

多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし、 i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき、係数 $a_0, \dots, a_7$ をすべて求めよ。
- (2) $0 < \theta < \pi$ に対して、

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (1) で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて、多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える。 $\theta = \frac{\pi}{7}$ として、 $k = 1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく。このとき、 $Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し、 $x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ。

5

空間内に、直線 l で交わる 2 平面 α, β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに、平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を、どちらも点 O を通り l に垂直にとる。 m, n 上にそれぞれ点 P, Q があり、

$$OP = \sqrt{3}, \quad OQ = 2, \quad PQ = 1$$

であるとする。線分 PQ 上の動点 T について、 $PT = t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。
- (2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。 T が線分 PQ 上を動くとき、 $f(t)$ の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

6

関数

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t| dt$$

の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。