

1

a, b を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし、 $y = ax + b$ で表される直線を l とする。

- (1) l が点 $(-2, 0)$ を通り、 l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。
- (2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

2

A 君と B 君はそれぞれ、0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は、自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし、0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A 君、B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して、しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。
- (2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの、A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

3

a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

- (1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

4

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において、辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし、辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ とするとき、 α と β を求めよ。
- (2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。 FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

5 α, β, γ を複素数とし、

$$z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \quad \dots (*)$$

を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$$

を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ と仮定し、また γ は負の実数であると仮定する。このとき、(*) を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。

6 a, b, c を実数とし、

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。ただし、 $a \neq 0$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $I(a, b)$ を求めよ。

(2) $J(a, b, c)$ を $I(a, b + c)$ と $I(a, b - c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$