$\boxed{1}$ $xy$ 平面における 2 つの放物線 $C : y = (x-a)^2 + b$, $D : y = -x^2$ を考える。

(1) $C$ と $D$ が 2 点で交わり、その 2 交点の $x$ 座標の差が 1 となるように実数 $a, b$ が動くとき、$C$ の頂点 $(a, b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 $a, b$ が (1) の条件を満たすとき、$C$ と $D$ の 2 交点を結ぶ直線は、放物線 $y = -x^2 - \dfrac{1}{4}$ に接することを示せ。

$\boxed{2}$ $n$ を 2 以上、$a$ を 1 以上の整数とする。箱の中に、1 から $n$ までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ、合計 $n$ 枚入っている。この箱から、1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す、という試行を $a$ 回繰り返す。ちょうど $a$ 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和が初めて $n$ 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1) $p(1)$ および $p(n)$ を求めよ。

(2) $p(2)$ を求めよ。

(3) $p(n-1)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 実数 $a$ は $0 < a < 4$ を満たすとする。$xy$ 平面の直線 $l : y = ax$ と曲線

$$C : y = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x < 4 \text{ のとき}) \\ 9a(x-4) & (x \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える。$C$ と $l$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく。

(1) $C$ と $l$ の交点の座標を求めよ。

(2) $S(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ 空間内に四面体 $ABCD$ がある。辺 $AB$ の中点を $M$、辺 $CD$ 的中点を $N$ とする。$t$ を $0$ でない実数とし、点 $G$ を

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (t-2)\overrightarrow{GC} + t\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$$

を満たす点とする。

(1) $\overrightarrow{DG}$ を $\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{DC}$ で表せ。

(2) 点 $G$ は点 $N$ と一致しないことを示せ。

(3) 直線 $NG$ と直線 $MC$ は平行であることを示せ。