

1

平面における 2 つの放物線 $C: y = (x - a)^2 + b$, $D: y = -x^2$ を考える。

- (1) C と D が異なる 2 点で交わり、その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき、 C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。
- (2) 実数 a, b が (1) の条件を満たしながら動くとき、 C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め、図示せよ。

2

n を 2 以上、 a を 1 以上の整数とする。箱の中に、1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ、合計 n 枚入っている。この箱から、1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す、という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和が初めて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

- (1) $p(1)$ および $p(n)$ を求めよ。
- (2) $p(2)$ を求めよ。
- (3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

3

整数 a, b は等式

$$3^a - 2^b = 1$$

を満たしているとする。

- (1) a, b はともに正となることを示せ。
- (2) $b > 1$ ならば、 a は偶数であることを示せ。
- (3) 等式を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。

4

三角形 ABC の内接円の半径を r 、外接円の半径を R とし、 $h = \frac{r}{R}$ とする。

また、 $\angle A = 2\alpha$ 、 $\angle B = 2\beta$ 、 $\angle C = 2\gamma$ とおく。

- (1) $h = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ となることを示せ。
- (2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ。
また、等号が成り立つのはどのような場合か。
- (3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

5 α を複素数とする。複素数 z の方程式

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 方程式が実数解をもつように α が動くとき、点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。
- (2) 方程式が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき、点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

6 xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x + y^2 \leq 2 \\ x + y \geq 0 \\ x - y \leq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

- (1) S を xy 平面に図示せよ。
- (2) V を求めよ。