

1

xy 平面における曲線 $y = \sin x$ の 2 つの接線が直交するとき、その交点の y 座標の値をすべて求めよ。

2

a を 1 ではない正の実数とし、 n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x - n) > \frac{1}{2} \log_a(2n - x)$$

- (1) $n = 6$ のとき、この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。
- (2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

3

a を実数とし、数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $a > 0$ のとき、数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。
- (2) $-1 < a < 0$ のとき、すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $-1 < a < 0$ のとき、数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。

4

実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

- (1) $[2x^2 + x + 3]$, $[x^5 - 1]$, $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]]$ をそれぞれ求めよ。
- (2) 整式 $A(x), B(x)$ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

- (3) 実数 θ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x \sin \theta + \cos \theta)^2] = x \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

- (4) 次の等式を満たす実数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

$$[(ax + b)^4] = -1$$

5

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t) dt$$

6

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し、新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに、袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとす。この試行を m 回繰り返したとき、取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m, k)$ とする。2 以上の整数 n に対して、以下の問いに答えよ。

(1) $p(n+1, 2)$ を $p(n, 2)$ と $p(n, 1)$ を用いて表せ。

(2) $p(n, 1)$ を求めよ。

(3) $p(n, 2)$ を求めよ。