

1

K を 3 より大きな奇数とし, $l + m + n = K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える。ただし, たとえば, $K = 5$ のとき, $(l, m, n) = (1, 1, 3)$ と $(l, m, n) = (1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす。

- (1) $K = 99$ のとき, N を求めよ。
- (2) $K = 99$ のとき, l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ。
- (3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ。

2

実数 t の関数

$$F(t) = \int_0^1 |x^2 - t^2| dx$$

について考える。

- (1) $0 \leq t \leq 1$ のとき, $F(t)$ を t の整式として表せ。
- (2) $t \geq 0$ のとき, $F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ。

3

a, b を正の実数とし, xy 平面上の直線 $\ell: ax + by - 2 = 0$ を考える。

- (1) 直線 ℓ と原点の距離が 2 以上であり, 直線 ℓ と直線 $x = 1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 (a, b) のとりうる範囲 D を求め, ab 平面上に図示せよ。
- (2) 点 (a, b) が (1) で求めた範囲 D を動くとする。このとき, $3a + 2b$ を最大にする a, b の値と, $3a + 2b$ の最大値を求めよ。

4

xyz 空間内の点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3}, 0, 1)$, $C(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。3 点 OAB を含む平面からの距離が 1 の点のうち, 点 O に最も近く, x 座標が正のものを H とする。

- (1) H の座標を求めよ。
- (2) 3 点 OAB を含む平面と点 C の距離を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。