

1

K を 3 より大きな奇数とし, $l + m + n = K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える。ただし, たとえば, $K = 5$ のとき, $(l, m, n) = (1, 1, 3)$ と $(l, m, n) = (1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす。

- (1) $K = 99$ のとき, N を求めよ。
- (2) $K = 99$ のとき, l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ。
- (3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ。

2

a を実数とし, 実数 x の関数 $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x + 1)^2$ を考える。

- (1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $a < 2$ のとき, $f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき, $f(x)$ が極小となる x の値を α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) とする。 $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ を示せ。
- (3) $f(x)$ が $x < \beta$ において単調減少し, かつ, $x = \beta$ において最小値をとるとする。このとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

3 正の整数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

4 xy 平面の第 1 象限内において, 直線 $\ell: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし, 円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) を考える。また, 直線 ℓ と x 軸, および, 円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし, $b > a$ とする。

(1) m を用いて t を表せ。

(2) t を用いて $\frac{b}{a}$ を表せ。

(3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ を求めよ。

5

座標空間内において、ベクトル

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \quad \vec{b} = (1, 1, -1), \quad \vec{c} = (0, 0, 1)$$

が定める 2 直線

$$\ell : s\vec{a}, \quad \ell' : t\vec{b} + \vec{c} \quad (s, t \text{ は実数})$$

を考える。点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし、点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に、点 $B_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に、点 $A_k(s_k\vec{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_kB_k 、点 $B_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して、点 $A_n(s_n\vec{a}), B_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める。

- (1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。
- (2) 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた S, T に対して、点 A, B をそれぞれ $A(S\vec{a}), B(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと、直線 AB は 2 直線 ℓ, ℓ' の両方と直交することを示せ。

6

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と、半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき、直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。