第　1　問

a, b, c を実数とし、$a \neq 0$ とする。
2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1, \quad f(1) = 1$

(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し,

$$f(x) \leqq 3x^2 - 1$$

このとき、積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f'(x))^2 \, dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

第　2　問

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す A,$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，

$$\frac{14(t-1)}{(1-i)t-7}$$

を表す点Pをとる。

(1)∠APB を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

第　3　問

xyz 空間において，平面 $z = 0$ の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を A とする．

次に，平面 $z = 0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z = 1$ 上の点 $(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする．

これらの曲面の共通部分を C とし，$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，平面 $z = t$ による切り口の面積を $S(t)$ とする．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ として，$t = 1 - \cos\theta$ とおくとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ．

(2) C の体積を，$\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ の形で求めよ．

第　４　問

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n=1,2,3,\cdots$ に対し，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ．また，$n \geq 3$ に対して，$s_n=s_{n-1}-s_{n-2}$ と示せ.

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ.

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数字を求めよ.

第　5　問

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする.

(1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ.

(2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ.

(3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$$

を求めよ.

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする.

第　6　問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ.