

第 1 問

不等式

$$y(y - |x^2 - 5| + 4) \leq 0, \quad y + x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

の表す領域を D とする。

- (1) D を図示せよ。
- (2) D の面積を求めよ。

第 2 問

r は $0 < r < 1$ をみたす実数, n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を, 次の条件 (i), (ii) をみたす 2 つの円で置き換える操作 (P) を考える。

(i) 新しい 2 つの円の半径の比は $r : 1 - r$ で, 半径の和はもとの円の半径に等しい。

(ii) 新しい 2 つの円は互いに外接し, もとの円に内接する。

以下のようにして, 平面上に 2^n 個の円を作る。

- 最初に, 平面上に半径 1 の円を描く。
 - 次に, この円に対して操作 (P) を行い, 2 つの円を得る (これを 1 回目の操作という)。
 - k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて, 操作 (P) を行い, 2^{k+1} 個の円を得る ($1 \leq k \leq n - 1$)。
- (1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。
- (2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。
- (3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。

第 3 問

正の整数の下 2 桁とは、100 の位以上を無視した数をいう。たとえば 2000, 12345 の下 2 桁はそれぞれ 0, 45 である。 m が正の整数全体を動くとき、 $5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

第 4 問

表が出る確率が p 、裏が出る確率が $1 - p$ であるような硬貨がある。ただし、 $0 < p < 1$ とする。この硬貨を投げて、次のルール (R) の下で、ブロック積みゲームを行う。

- (R) $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ ブロックの高さは、最初は } 0 \text{ とする。} \\ \textcircled{2} \text{ 硬貨を投げて表が出れば高さ } 1 \text{ のブロックを } 1 \text{ つ積み上げ、裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ } 0 \text{ に戻す。} \end{array} \right.$

n を正の整数、 m を $0 \leq m \leq n$ をみたす整数とする。

- (1) n 回硬貨を投げたとき、最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。
- (2) (1) で、最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。
- (3) ルール (R) の下で、 n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い、それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち、高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし、最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。