第　１　問

座標平面の点 (x, y) を $(3x + y, -2x)$ へ移す移動 f を考え、点 P が移る行き先を $f(P)$ と表す。f を用いて直線 $l_0, l_1, l_2, \cdots$ を以下のように定める。

- l_0 は直線 $3x + 2y = 1$ である。
- 点 P が l_n 上を動くとき、$f(P)$ が描く直線を l_{n+1} とする $(n = 0, 1, 2, \cdots)$。

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_n x + b_n y = 1$ と表す。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。

(2) 不等式 $a_n x + b_n y > 1$ が定める領域を D_n とする。$D_0, D_1, D_2, \cdots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

第　2　問

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき、次の操作 (A) を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を、等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問 (1)、(2) に答えよ。

(1) 最初に白 2 枚、黒 2 枚、合計 4 枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白 3 枚、黒 3 枚、合計 6 枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

第　3　問

(1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり、それぞれの面の重心を G_1、G_2 とする。G_1、G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし、各辺の長さは 1 とする。

第　4　問

放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で、h を表せ。

(2) L を固定したとき、h がとりうる値の最小値を求めよ。

第　5　問

自然数 n に対し、$\dfrac{10^n-1}{9} = \underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば $\boxed{1} = 1$、$\boxed{2} = 11$、$\boxed{3} = 111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが、3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが、$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

第　6　問

座標平面において、媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t \sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。