

第 1 問

O を原点とする座標平面上に点 $A(-3, 0)$ をとり, $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して, 次の条件 (i), (ii) をみたす 2 点 B, C を考える。

- (i) B は $y > 0$ の部分にあり, $OB = 2$ かつ $\angle AOB = 180^\circ - \theta$ である。
- (ii) C は $y < 0$ の部分にあり, $OC = 1$ かつ $\angle BOC = 120^\circ$ である。ただし $\triangle ABC$ は O を含むものとする。

以下の問 (1), (2) に答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき, θ の値を求めよ。
- (2) θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき, $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と, そのときの $\sin \theta$ の値を求めよ。

第 2 問

2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$f(x+1) = c \int_0^1 (3x^2 + 4xt) f'(t) dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a, b, c の組をすべて求めよ。

第 3 問

2つの箱 L と R , ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。 x を 0 以上 30 以下の整数とする。 L に x 個, R に $30 - x$ 個のボールを入れ, 次の操作 (＃) を繰り返す。

(＃) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$, $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15) = P_2(15) = \frac{1}{2}$ となる。以下の問 (1), (2) に答えよ。

(1) $m \geq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とすると, $P_{2n}(10)$ を求めよ。

第 4 問

C を半径 1 の円周とし、 A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t = 0$ に出発し、 C 上を各々一定の速さで、 P, Q は反時計回りに、 R は時計回りに、時刻 $t = 2\pi$ まで動く。 P, Q, R の速さは、それぞれ $m, 1, 2$ であるとする。（したがって、 Q は C をちょうど一周する。）ただし、 m は $1 \leq m \leq 10$ をみたす整数である。

$\triangle PQR$ が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。