第　1　問

　3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a + b + c = 1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

第　2　問

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

第　3　問

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作（$*$）を繰り返す。

（$*$）箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，

$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z, 16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば

$$P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$$

となる。以下の問（1）、（2）、（3）に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3) n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。

第　4　問

原点 O とする座標平面上の曲線

$$C : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と，その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ を考える。

(1) P_i $(i = 1, 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y = x$ との交点を，それぞれ H_i $(i = 1, 2)$ とする。このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2) $x_1 < x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

第　5　問

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P，Q，R の速さは，それぞれ m，1，2 であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ をみたす整数である。$\triangle PQR$ が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

第　6　問

四面体 $OABC$ において、4 つの面はすべて合同であり、$OA = 3$、$OB = \sqrt{7}$、$AB = 2$ であるとする。また、3 点 O、A、B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $0 < t < 1$ をみたす実数 t に対して、線分 OA、OB 各々を $t : 1 - t$ に内分する点をそれぞれ P_t、Q_t とおく。2 点 P_t、Q_t を通り、平面 L に垂直な平面を M とするとき、平面 M による四面体 $OABC$ の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、$S(t)$ の最大値を求めよ。