

第 1 問

座標平面において、点 $P(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし、直線 $y = a(x + 1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) $\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ が最大となる a を求めよ。

第 2 問

実数 x の小数部分を, $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし, これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して, 無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように順次定める。

(i) $a_1 = \langle a \rangle$

(ii)

$$\begin{cases} a_n \neq 0 & \text{のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 & \text{のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。 a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \frac{p}{q}$ と表すとき, q 以上のすべての自然数 n に対して, $a_n = 0$ であることを示せ。

第 3 問

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $P(t, 0)$ に対し、原点 O を中心とし点 P を通る円周上を、 P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $Q(u(t), v(t))$ と表す。

(1) $u(t), v(t)$ を求めよ。

(2) $0 < a < 1$ の範囲の実数 a に対し、積分

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)^2\} + \{v'(t)\}^2} dt$$

を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。

第 4 問

座標平面上の 1 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を, 3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

第 5 問

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え、このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ。各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1) (p, q) パターンのうち、 $w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。

また、 $w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ。

(2) 以下 $p = q$ の場合を考える。 s を整数とする。 (p, p) パターンで

$w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

(3) (p, p) パターンの総数を求めよ。

第 6 問

(1) x, y を実数とし, $x > 0$ とする。 t を変数とする 2 次関数 $f(t) = xt^2 + yt$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 (x, y) 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x > 0$ かつ, 実数 z で $0 \leq t \leq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

を満たすようなものが存在する。 S の概形を図示せよ。

(3) 次の条件を満たす点 (x, y, z) 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

$0 \leq x \leq 1$ かつ, $0 \leq t \leq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して,

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

が成り立つ。 V の体積を求めよ。