第　1　問

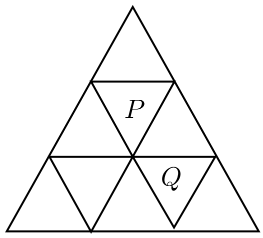
次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2 + (y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 ℓ は原点を通り、D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また、L が最大値をとるとき、x 軸と ℓ のなす角 θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

第　2　問

図のように、正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り、部屋 P、Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し、1 秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



第　3　問

座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし、y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

第　4　問

n を 2 以上の整数とする。自然数 (1 以上の整数) の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

第　5　問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

条件 (D):

- A の成分 a, b, c, d は整数である。
- 平面上の 4 点 $(0,0)$, (a,b), $(a+c, b+d)$, (c,d) は、面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2) $c = 0$ ならば、A に B, B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより、4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA, $B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は、それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ。

第　6　問

2×2 行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(P) = p + s$$

と定める。a, b, c は $a \geqq b > 0,\ 0 \leqq c \leqq 1$ を満たす実数とする。行列 A, B, C, D を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数 x に対し $U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 各実数 t に対して、x の関数

$$f(x) = \mathrm{Tr}\left(\left(U(t)AU(-t) - B \right) U(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(-x) \right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ。(ただし、最大値をとる x を求める必要はない。)

(2) すべての実数 t に対し

$$2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つことを示せ。