

第 1 問

関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C ，原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし， C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする。 C と ℓ の共有点を O, P, Q とし， $|OP|$ と $|OQ|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は， O, P, Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

第 2 問

座標平面上の 3 点

$$P(0, -\sqrt{2}), \quad Q(0, \sqrt{2}), \quad A(a, \sqrt{a^2 + 1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を考える。

- (1) 2 つの線分の長さの差 $PA - AQ$ は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ。
- (2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする。このとき、線分の長さの和

$$PA + AB + BC$$

は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ。

第 3 問

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad 2x + y \leq 5$$

をともに満たすとき、 $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ の最小値を求めよ。

第 4 問

A、B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、A はコインを B に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、B はコインを A に渡す。

そして A、B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば、コインが表、裏、表、表と出た場合、この時点で A は 1 点、B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A、B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。