

第 1 問

以下の命題 A、B それぞれに対し、その真偽を述べよ。また、真ならば証明を与え、偽ならば反例を与えよ。

命題 A n が正の整数ならば、 $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$ が成り立つ。

命題 B 整数 n, m, ℓ が $5n + 5m + 3\ell = 1$ をみたすならば、 $10nm + 3m\ell + 3n\ell < 0$ が成り立つ。

第 2 問

座標平面上の 2 点 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$ を考える。また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件 (i) または (ii) をみたす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ。

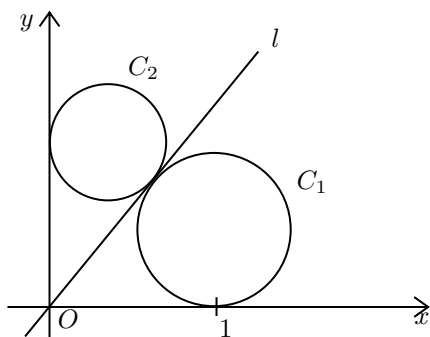
- (i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある。
- (ii) 点 A, P, B は同一直線上にある。

第 3 問

ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに、以下の 3 条件 (i), (ii), (iii) で定まる円 C_1 , C_2 を考える。

- (i) 円 C_1 , C_2 は 2 つの不等式 $x \geq 0$, $y \geq 0$ で定まる領域に含まれる。
- (ii) 円 C_1 , C_2 は直線 ℓ と同一点で接する。
- (iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し、円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1 , 円 C_2 の半径を r_2 とする。 $8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と、その最小値を求めよ。



第 4 問

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し、次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ、表が出たときは文字列 A A を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、A A, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、コインを 5 回投げ、その結果が順に表、裏、裏、表、裏であったとすると、得られる文字列は、

AABBAAB

となる。このとき、左から 4 番目の文字は B, 5 番目の文字は A である。

- (1) n を正の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n - 1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。