

第 1 問

正の実数 a に対して、座標平面上で次の放物線を考える。

$$C : y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき、 C の通過する領域を図示せよ。

第 2 問

どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し、次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ、出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き、4 のときは文字 B を、5 のときは文字 C を、6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいろを投げ、同じ規則に従って、AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば、さいころを 5 回投げ、その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると、得られる文字列は、

AACDAAB

となる。このとき、左から 4 番目の文字は D、5 番目の文字は A である。

- (1) n を正の整数とする。 n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。 n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n - 1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

第 3 問

a を正の実数とし、 p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y = ax^p (x > 0)$ と $y = \log x (x > 0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし、その共有点を Q とする。以下の問いに答えよ。必要であれば、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$$

を証明なしに用いてよい。

- (1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。
- (2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。
- (3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

第 4 問

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。
- (2) すべての $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し、 $p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。
- (3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 $p_n = q_{2n-1}$ を示せ。

第 5 問

m を 2015 以下の正の整数とする。 ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

第 6 問

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし、 p, q を実数とする。 $|x| \leq \frac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$