

第 1 問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり、 $x \rightarrow +0$ 、 $x \rightarrow \pi - 0$ のときの極限を調べよ。

第 2 問

数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

- (1) $n \geq 2$ とする。 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\frac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geq 1$ と分子 q_n を求めよ。
- (2) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

第 3 問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える。 $k > 0$ を実数とする。点 P が C 上を動き、点 Q が線分 OA 上を動くとき、

$$OR = \frac{1}{k}OP + kOQ$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\lim_{k \rightarrow +0} S(k)$ 、 $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ。

第 4 問

$a > 0$ とし、

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の 2 条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに、方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。 $w = \frac{1}{1-u}$ とおき、 w と共役な複素数を $\bar{w}$ で表す。

- (1) u と $\bar{w}$ を z についての整式として表し、絶対値の商 $\left| \frac{w + \bar{w} - 1}{w} \right|$ を求めよ。
- (2) C のうち実部が $\frac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

第 6 問

座標空間内の 4 点 $O(0,0,0)$ 、 $A(1,0,0)$ 、 $B(1,1,0)$ 、 $C(1,1,1)$ を考える。
 $\frac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA 、 AB 、 BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を、それぞれ V_1 、 V_2 、 V_3 とする。

- (1) 平面 $y = t$ が V_1 、 V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに、この範囲の t に対し、平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および、平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。
- (2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。
- (3) r は (2) の条件をみたすとする。 V_1 の体積を S とし、 V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。 V_1 、 V_2 、 V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。
- (4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする。 S と T を求め、 V の体積を決定せよ。