

第 1 問

a, b, c, p を実数とする。不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$bx^2 + cx + a > 0$$

$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数 x の集合と、 $x > p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

- (1) a, b, c はすべて 0 以上であることを示せ。
- (2) a, b, c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。
- (3) $p = 0$ であることを示せ。

第 2 問

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき、それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle PQR$ で表す。また、 P, Q, R が同一直線上にあるときは、 $\triangle PQR = 0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし、 $\triangle ABC = 1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leq 3$$

を満たしながら動くとき、 X の動きうる範囲の面積を求めよ。

第 3 問

$-1 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して、

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}, \quad y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $P(x(t), y(t))$ を考える。

- (1) $-1 < t \leq 1$ における t の関数 $\frac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。
- (2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする。 $-1 \leq t \leq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ、最大値を求めよ。
- (3) t が $-1 \leq t \leq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし、 C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき、 D が通過する領域の面積を求めよ。

第 4 問

n, k を、 $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。 k 個の整数の選び方すべてに対して積をとることにより得られる $C(n, k)$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば、

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し、 $a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し、 x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。 $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ の関係を x についての整式として表せ。

(3) $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

第 5 問

座標空間において、 xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし、点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また、点 $A(1, 0, 2)$ を考える。

- (1) 点 P が S の底面を動くとき、線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z = 1$ による S の切り口および、平面 $z = 1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 点 P が S を動くとき、線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

第 6 問

以下の問いに答えよ。

- (1) A, α を実数とする。 θ の方程式

$$A \sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$$

を考える。 $A > 1$ のとき、この方程式は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解を持つことを示せ。

- (2) 座標平面上の楕円

$$C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える。また、 $0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して、不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。 D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r ($0 < r < 1$) が存在することを示せ。また、そのような r の最大値を求めよ。

条件： C 上の点 Q で、 Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。