第　1　問

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

第　2　問

N を 5 以上の整数とする。1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件 1：S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件 2：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l\,,\, l+1\,,\, \ldots\,,\, l+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{8, 9, 10\}$ を含む。

(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。

(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。

第　3　問

a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

第　4　問

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする。このとき, $A = \dfrac{{}_{4a+1}C_{4b+1}}{B}$, $B = \dfrac{{}_{a}C_{b}}{B}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

(3) a, b は (2) の通りとし, さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。$\dfrac{{}_{4a+1}C_{4b+1}}{B}$ を 4 で割った余りは $\dfrac{{}_{a}C_{b}}{B}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) $\dfrac{{}_{2021}C_{37}}{B}$ を 4 で割った余りを求めよ。