

第 1 問

(1) 正の整数 k に対し、

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し、

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ。

第 2 問

黒玉 3 個、赤玉 4 個、白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し、取り出した玉を順に横一行に 12 個すべて並べる。ただし、袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

- (1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。
- (2) どの赤玉も隣り合わないとき、どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

第 3 問

a を実数とし、座標平面上の点 $(0, a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

- (1) C が、不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。
- (2) a は (1) で求めた範囲にあるとする。 C のうち $x \geq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。 S 上の点 P に対し、点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_P とする。 $L_Q = L_R$ となる S 上の相異なる 2 点 Q, R が存在するような a の範囲を求めよ。

第 4 問

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(2, 0, 0)$ 、 $B(1, 1, 1)$ 、 $C(1, 2, 3)$ を考える。

- (1) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。
- (2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし、その垂線と直線 AB の交点を H とする。 $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
- (3) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$ により定め、 Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。 S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし、三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面内にあり、周とその内部からなるものとする。

第 5 問

整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える。

- (1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし、 $g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。 $g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。
- (2) a, b を実数とし、 $h(x) = x^2 + ax + b$ とおく。 $h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき、 $h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。 $h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ。

第 6 問

O を原点とする座標空間において、不等式 $|x| \leq 1$ 、 $|y| \leq 1$ 、 $|z| \leq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち、 $z < 1$ を満たす部分を S とする。

以下、座標空間内の 2 点 A, B が一致するとき、線分 AB は点 A を表すものとし、その長さを 0 と定める。

- (1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき、点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $OP \leq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。

- (2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき、点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を用いてよい。

(iii) $ON + NP \leq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない。

(v) 線分 NP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。