

第 1 問

座標平面上で、放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $P (\cos \theta, \sin \theta)$, $Q (-\cos \theta, \sin \theta)$ を通り、点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている。ただし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

- (1) a, b, c を $s = \sin \theta$ を用いて表せ。
- (2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。
- (3) $A \geq \sqrt{3}$ を示せ。

第 2 問

以下の問いに答えよ。必要ならば、 $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

- (1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

第 3 問

座標平面上に 2 点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ をとる。x 軸上の 2 点 $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ が、次の条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i) $0 < p < 1$ かつ $p < q$

(ii) 線分 AP の中点を M とするとき, $\angle OAP = \angle PMQ$

(1) q を p を用いて表せ。

(2) $q = \frac{1}{3}$ となる p の値を求めよ。

(3) $\triangle OAP$ の面積を S , $\triangle PMQ$ の面積を T とする。 $S > T$ となる p の範囲を求めよ。

第 4 問

n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり、それに内接する正 n 角形を考える。 n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし、どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。