第　1　問

座標空間内の点 A $(0, -1, 1)$ をとる。xy 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i) P は原点 O と異なる。

(ii) $\angle AOP = \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle OAP = \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。

第　2　問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で、$f'(\tan\alpha) = 0$ となるものを求めよ。

(2) (1) で求めた α に対し、$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば、$0.69 < \log 2 < 0.7$ であることを用いてよい。

第　3　問

座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i) 最初に、P は点 $(2,1)$ にいる。

(ii) ある時刻で P が点 (a,b) にいるとき、その 1 秒後には P は
- 確率 $\frac{1}{3}$ で x 軸に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して (a,b) と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし、(1) については、結論のみを書けばよい。

(1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2,1)$ にいる確率と、最初から n 秒後に P が点 $(-2,-1)$ にいる確率は等しいことを示せ。

(3) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2,1)$ にいる確率を求めよ。

第　4　問

$$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$$

とおく。$0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し、座標平面上の点 $(t, f(t))$ を通り、この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち、x 軸上に中心を持つ円を C_t とする。

(1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t), 0)$、半径を $r(t)$ とおく。$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

(2) 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3, a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか。

第　5　問

座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,0,0)$、$\mathrm{B}(0,1,0)$、$\mathrm{C}(0,0,1)$ をとり、D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

第　6　問

2 以上の整数で、1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 20x$ とする。$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2) a, b を整数の定数とし、$g(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とする。$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。